Группа G – множество, где введена некая операция, сопоставляющая ***любой*** упорядоченной паре элементов из этого множества новый оттуда, так что:
1) существует единичный элемент E такой что, для любого A из G AE=EA=A
2) для каждого A из G в G также найдётся и A^{-1} такой, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.
Как правило, элементы группы – различные преобразования чего-то, мы это увидим в дальнейшем
Примеры групп:
Повороты, сдвиги
Все линейные пространства с операцией сложения

Группы конечного размера (ещё говорят – порядка)
Размер или порядок – число элементов в группе.
Например, в группе
«тождественное преобразование, поворот на 180 градусов»
порядок = 2,
а в группе
«тождественное преобразование, поворот на 90 градусов, поворот на 180 градусов, поворот на 270 градусов»
порядок = 4.

Про группы конечного порядка можно много чего сказать – не зря же математики большую теорию про них выкатили. Но желающих почитать про них отошлём к «побочным» методичкам, а здесь будем изучать группы бесконечного порядка, которые применяются в физике.

Группы сдвига
Особого обозначения они не имеют из-за их тривиальности. Я буду их буду обозначать Сдв(размерность).
Сдв1 – это группа параллельных переносов вдоль прямой (в 1D)
Сдв2 – это группа параллельных переносов в плоскости (в 2D)
Сдв3 – это группа параллельных переносов в объёме (в 3D)
Все данные группы являются абелевыми, потому что параллельные переносы коммутируют между собой.

Отметим ещё такой факт: любой параллельный перенос в плоскости можно представить как композицию переноса сначала вдоль оси X, потом вдоль оси Y. Т.е. любой элемент группы Сдв2 можно представить как умножение двух элементов группы Сдв1.
А любой элемент группы Сдв3 можно представить как умножение двух элементов группы Сдв2.

Говорят, что группа Сдв2 разлагается в ***простую сумму***.

Точнее определение таково:
Говорят, что группа G разлагается в простую сумму групп H1, H2, … Hn, если:

1) Любой из элементов G можно представить в виде произведения $g=h_1h_2\dots h_n$ (где h_k – произвольный элемент из группы H_k), причём единственным образом (с точностью до перестановок)
2) Элементы различных подгрупп между собой коммутируют.

Можно легко убедиться в том, что любой параллельный перенос в 3D или 2D представляется единственным способом в виде композиции параллельных переносов (с точностью до их последовательности выполнения), а переносы вдоль разных осей коммутируют между собой.

Группы поворотов

В 1D никаких вращений, естественно, быть не может. Впервые со вращениями мы сталкиваемся на плоскости.
Выберем некую точку на плоскости. Тогда мы можем ввести группу поворотов вокруг неё. В ней живут все возможные повороты вокруг этой точки на любое число градусов от 0 до 360. Такая группа имеет даже своё название – SO2.
S – special, специальная.
O – обозначения групп поворотов. Чтобы вы это лучше запомнили, вот вам картинка:

(шучу, на самом деле от слова «ортогональный», про это позже).
2 – размерность места, где это всё происходит (плоскость).

Данная группа абелева. В самом деле, какая нам разница – сначала повернуть на 23 градуса, а потом на 65, или сначала на 65, а потом на 23, если в результате мы всё равно получим поворот на 88 градусов.

А вот группа поворотов вокруг точки в 3D (SO3) неабелева. Чтобы нам лучше изучить её суть, давайте посмотрим, что такое матрицы групп.

Матрицы групп

Пусть x, y, z – старые координаты частицы
x^I, y^I, z^I – старые координаты частицы
А меняются они вследствие изменения нашей СК – сдвига и поворота.
Новые координаты можно получить из старых матричным умножением:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Где ( ) – матрица нашего преобразования, матрица линейного оператора , матрица элемента нашей группы… ну вы поняли.

Теперь давайте смотреть на матрицы наших групп. Прежде всего – поворотов.

Матрица поворота на угол φ

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Известна вам ещё из линала.

Теперь вернёмся к SO3. Каждый её элемент можно представить как композицию трёх поворотов: вдоль оси x, вдоль оси y и вдоль оси z, поэтому матрицу каждого элемента SO3 можно записать как произведение трёх матриц:

1) повернуть вдоль оси x на произвольный угол φ_1
2) повернуть вдоль оси y на произвольный угол φ_2
3) повернуть вдоль оси z на произвольный угол φ_3

$$g = g_1 g_2 g_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Хочется сказать «разложили в прямую сумму», да вот беда – нет условия на коммутацию наших трёх поворотов!
С точки зрения геометрии - повороты вдоль осей x, y, z не коммутируют между собой.
С точки зрения матриц – не коммутируют наши три матрицы.
Так что это не прямая сумма, но всё равно неплохо и достаточно красиво.

Зачем нужна буква S?
Есть ещё группы O2, это кислород. Шучу. В O2, помимо SO2, ещё входит смена направлений обеих осей ***одновременно***:
$x_{нов}=-x_{ст}$
$y_{нов}=-y_{ст}$
Вот так вот выглядит матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ну и, очевидно, матрицы композиции поворота и смены направления всех осей.

А в O3 ещё входит матрица смена направления всех (уже трёх!) осей одновременно:
(-1 0 0
0 -1 0
0 0 -1)

Предположим, что нам дали матрицу из O2 (или O3) и спросили: а посчитай нам БЫСТРО, входит ли она в SO2/SO3?
Всё, что вы должны сделать – подсчитать определитель. Если он 1 – всё ОК, проходим в SO2/SO3, если -1 – так, разворачиваем, фейс-контроль не пройден. (Других вариантов, кроме как 1 и -1, для матриц из O2 и O3 быть не может).

Условие одновременной смены знака у всех осей очень важно. Если мы от него откажемся, то получим не O2 или O3, а «надстройку» на ней. Честно, не разбирался, какое название уже у этих групп. Они в физике не особо используются. Это связано с тем, что если мы меняем знак у одной оси, а у другой нет, то у нас появляется выделенное направление, а в нашем изотропном мире это ну такое ☺

Группа Лоренца SO(3,1)
По аналогии с SO2 и SO3 мы можем ввести группу поворотов в четырёхмерном пространстве. Она называется SO4. Но она неинтересна физикам ☺
Зато физикам интересна другая группа, похожая на SO4. Там тоже четырёхмерное пространство, но не простое, а Минковского. Ну вы помните, вот с такой матрицей Грама
(1 0 0 0
0 -1 0 0
0 0 -1 0
0 0 0 -1)
Эта группа переходов одной СК к другим,
У нас для этого есть шесть возможностей:
1) повернуть вдоль оси x на произвольный угол φ_1
2) повернуть вдоль оси y на произвольный угол φ_2
3) повернуть вдоль оси z на произвольный угол φ_3
4) поехать вдоль оси x с произвольной бетой β_1
5) поехать вдоль оси y с произвольной бетой β_2
6) поехать вдоль оси z с произвольной бетой β_3
Термин «поехать вдоль оси такой-то» достаточно «колхозный», физики говорят «лоренцев буст вдоль такой-то оси с такой-то бетой»
Как видите, на этот раз параметров аж 6: φ_1, φ_2, φ_3, β_1, β_2, β_3.
Когда вы на СТО писали нечто такое

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Вы рассматривали довольно частный случай, достаточно узкую подгруппу группы Лоренца, где φ_1=φ_2=φ_3=β_2=β_3 и лишь β_1 вы варьировали (в рукописных строчках выше это β).
Вы тогда, на электроде, ещё такую матрицу писали

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А теперь вы, вероятно, хотите, что я вам написал общий вид ***любой*** матрицы из группы Лоренца через шесть констант: φ_1, φ_2, φ_3, β_1, β_2, β_3. Хе-хе! Теоретически я это могу сделать, фактически запись бы заняла бы полстраницы.
Смотрите: вот произвольный элемент группы SO(3) мы смогли разложить в ***прямую сумму*** трёх поворотов из SO(2).
В матричном виде это записалось так:

$$g = g_1 g_2 g_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представьте, что было бы, если бы я явно подсчитал это матричное умножение. Там такая дрянь получится. А вот в виде произведения трёх матриц и наглядно, и есть физический смысл – последовательный поворот вокруг трёх осей.

Хорошо, тогда у нас возникает новая идея: а нельзя ли группу Лоренца SO(3,1) представить в виде прямой суммы каких-нибудь групп попроще?
Отличный вопрос! Можно, в виде прямой суммы SO(3) и SO(3). Ну, не совсем SO(3), там надо повозиться… как-нибудь в другой раз.

Не лишним будет напомнить одно свойство матриц поворотов из линала, которые вы наверняка забыли
Матрицы поворота ортогональны (поэтому и группы называются «O» да «SO» - по первой букве слова «ортогональны»). Это значит, что $OO^{-1}=E$, где O – любая матрица из SO.
Отсюда можно вывести, что домножение на O не меняет скалярного произведения: (OA, OB)=(A, B), где A и B – векторы.
Это значит то, что скалярное произведение не меняется с поворотом СК. Это вполне естественно. Ну сдвинули мы СК, оба вектора сдвинулись относительно осей на один и тот же угол, с чего бы поменяться скалярному произведению? Так что : (OA, OB)=(A, B).

Комплексным аналогом ортогональных матриц будут унитарные матрицы – члены унитарных групп.

УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ

Для начала нам нужно ввести понятие комплексного вектора.
Вектор вообще – это столбец. Обычно столбец действительных чисел. Так, если вектор – это стрелочка в n-мерном проекции, то эти действительные числа в количестве n штук.
А тут у нас комплексный вектор, где у нас по-прежнему столбец из n чисел, но уже комплексных. Представить это уже достаточно затруднительно. Я так и не нашёл хорошей интерпретации, которую можно представить мысленно в голове.

Правило, по которому одному столбцу из комплексных чисел (т.е. столбец комплексных чисел) сопоставляется другой, назовём комплексным оператором. Если это правило линейное, то линейным оператором.
Ну у него есть матрица, тут всё понятно.

Определение из линала, которое вы, конечно, забыли. Матрица U называется унитарной, если $U^+U=E$ (E – единичная матрица).

Определение. Назовём U(n) множество унитарных матриц размером nxn.
Теорема. U(n) – группа.
Для этого нужно доказать, что произведение двух унитарных матриц – унитарная матрица.
Док-во. Пусть A и B – унитарные матрицы. Это значит, что $A^+A=E$ и $B^+B=E$.
Тогда $(AB)^+(AB)=B^+A^+AB=B^+B=E$. Ч.т.д.

Среди U(n) выделяют подгруппу SU(n). В неё проходят только те матрицы, для которых детерминант равен 1.
Вновь теорема – SU(n) – группа.
Опять нужно проверить, что произведение двух матриц с единичным определителем есть матрица с единичным определителем. Но это теорема из линала. Ч.т.д.

Сразу сделаю замечание. Если вы пойдёте гуглить всю возможную инфу про SU2 и SU3, вам Гугл выдаст матрицы Паули для SU2:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

И матрицы Гелл-Манна для SU3

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Так вот, ***это НЕ значит, что эти матрицы принадлежат SU2 и SU3***! Это ***заготовки(!!!)*** под генераторы (что это такое – в следующей методичке).
Например, σ_1 и σ_3 принадлежат U2, но не SU2 (определитель у них -1). Все матрицы Гелл-Манна, кроме восьмой, вырожденные => U^+U не может быть вырожденной матрицей.
Зачем тогда они нужны? Это, как я уже сказал, заготовки под генераторы. Про них поговорим попозже.

Цель этой методички – познакомить вас худо-бедно с группами SO3, SU2, SU3. Именно они применяются в физике.